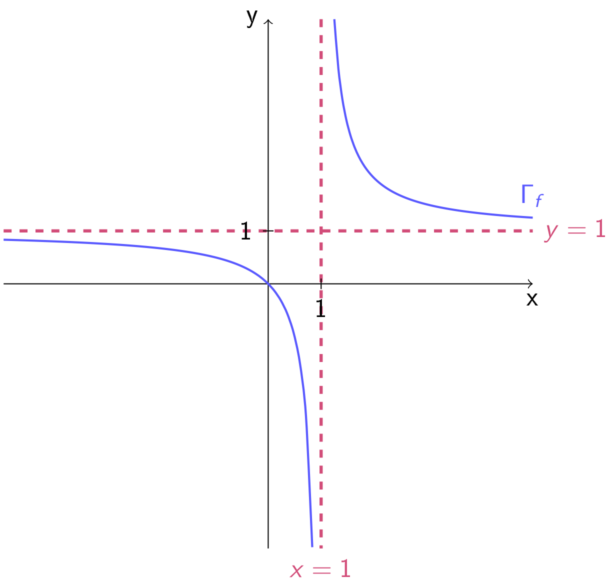
3.4. Asimptote

13. 11. 2020.

Fotografija: Derrin Twiford

Primjer: $f(x) := 1 + \frac{1}{x-1}$



Horizontalne asimptote

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ako za neki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to a$$

ili

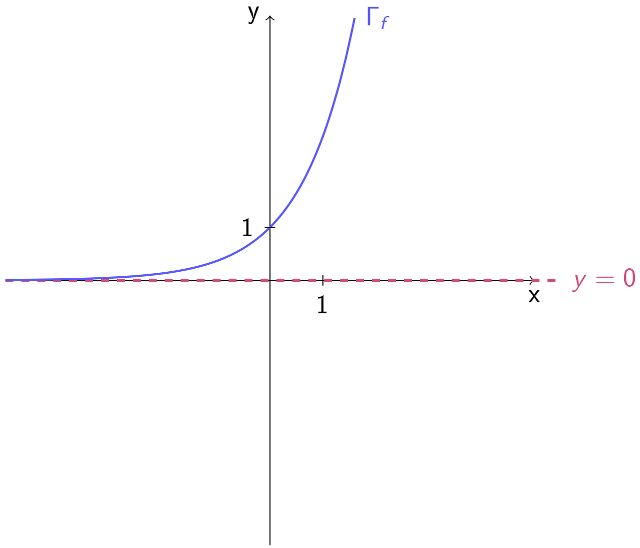
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to a$$

($\to$:= “približava se, teži, konvergira”), tada kažemo da je pravac

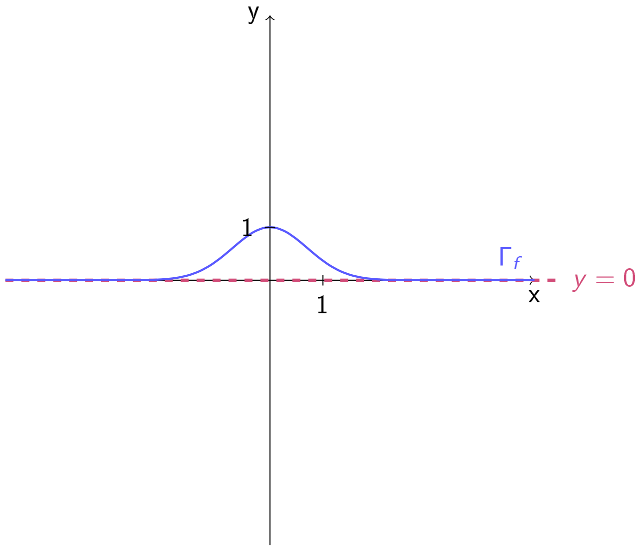
$$y = a$$

horizontalna asimptota funkcije f.

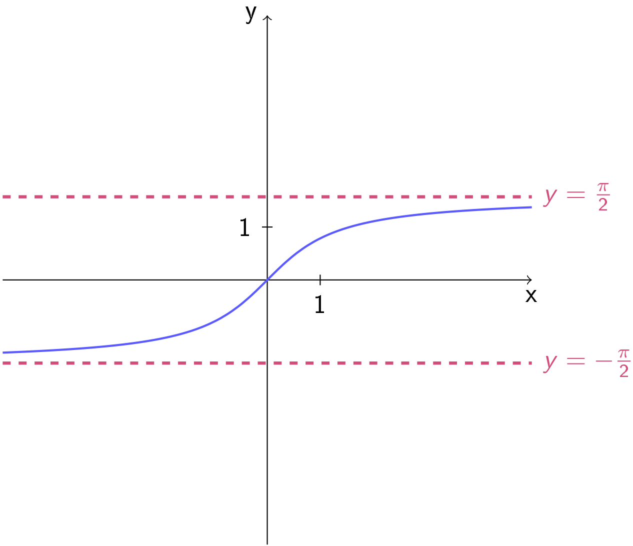
Primjer: $f(x) := e^x$



Primjer: $f(x) := e^{-x^2}$



Primjer: $f(x) := \operatorname{arctg} x$



Primjer: Horizontalne asimptote funkcije $f(x) := \frac{1}{x^2-1}$

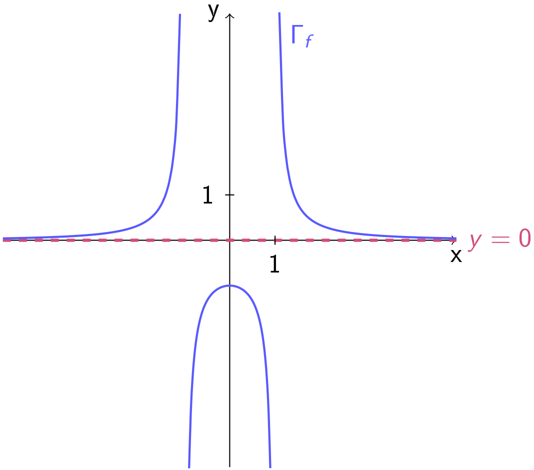
$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - 1} \to 0.$$

$\rightsquigarrow$ Pravac $y = 0$ je jedina horizontalna asimptota funkcije f.

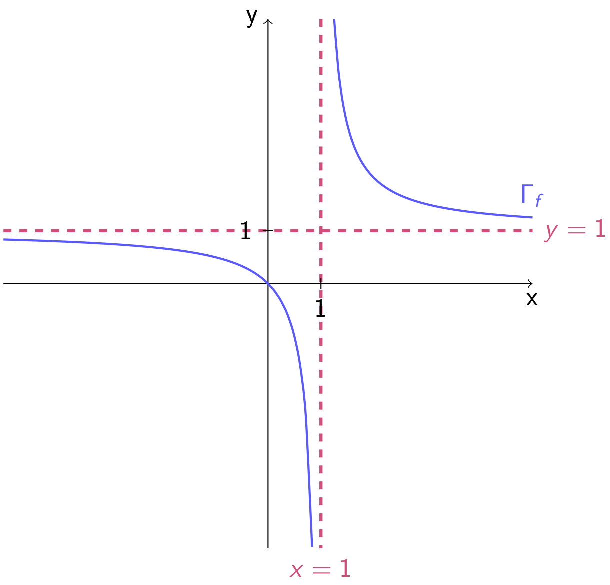
Primjer: Horizontalne asimptote funkcije $f(x) := \frac{1}{x^2-1}$

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to 0.$$

$\rightsquigarrow$ Pravac $y = 0$ je jedina horizontalna asimptota funkcije f.



Primjer s početka: $f(x) := 1 + \frac{1}{x-1}$



Vertikalne asimptote

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ako za neki $c \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\underbrace{x \to c-}_{\substack{\text{“}x\text{ se približava } c \text{ slijeva”:}\\ x\to c \text{ sa } x<c}} \qquad \Rightarrow \quad f(x) \to \pm\infty$$

ili

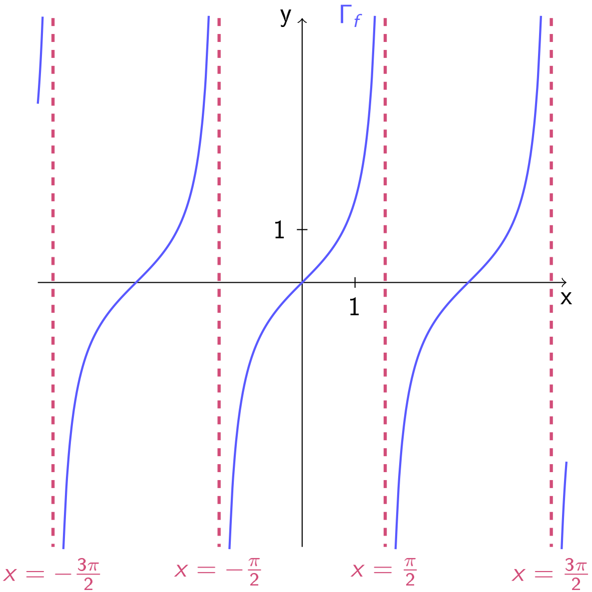
$$\underbrace{x \to c+}_{\substack{\text{“}x\text{ se približava } c \text{ zdesna”:}\\ x\to c \text{ sa } x>c}} \qquad \Rightarrow \quad f(x) \to \pm\infty,$$

tada kažemo da je pravac

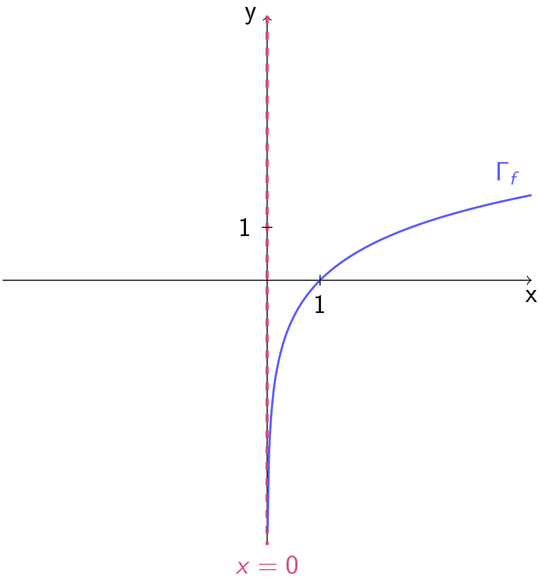
$$x = c$$

vertikalna asimptota funkcije f.

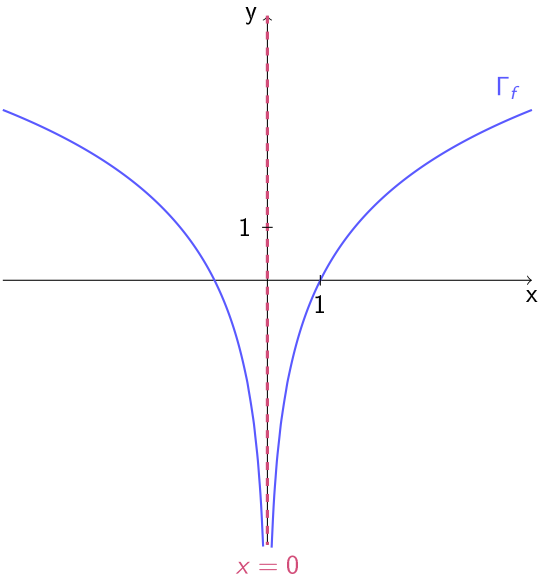
Primjer: $f(x) := \operatorname{tg} x$



Primjer: $f(x) := \ln x$



Primjer: $f(x) := \ln\left(x^2\right)$



Vertikalne asimptote

U našim su primjerima jedini kandidati za vertikalne asimptote funkcije f pravci oblika

$$x = c,$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ rub domene funkcije f.

Primjer: Vertikalne asimptote funkcije $f(x) := \frac{1}{x^2-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

$$x \to -1\pm \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to \mp\infty.$$

$$x \to 1\pm \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to \pm\infty.$$

$\rightsquigarrow$ Pravci $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote funkcije f.

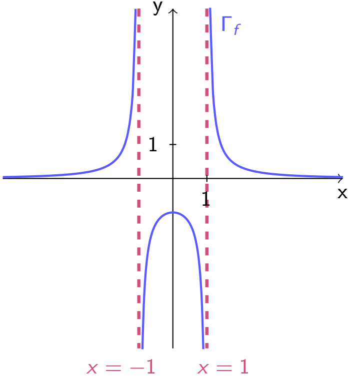
Primjer: Vertikalne asimptote funkcije $f(x) := \frac{1}{x^2-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle.$

$$x \to -1\pm \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to \mp\infty.$$

$$x \to 1\pm \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to \pm\infty.$$

$\rightsquigarrow$ Pravci $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote funkcije f.



Tri korisne činjenice za proučavanje ponašanja funkcija u $\pm\infty$, tj.

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to ?$$

Neka su $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

u $\pm\infty$ se ponaša kao njegov vodeći član $a_n x^n$.

Neka su $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

u $\pm\infty$ se ponaša kao njegov vodeći član $a_n x^n$.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad -x^{100} + x^{99} \to$

Neka su $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

u $\pm\infty$ se ponaša kao njegov vodeći član $a_n x^n$.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad -x^{100} + x^{99} \to$

Neka su $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

u $\pm\infty$ se ponaša kao njegov vodeći član $a_n x^n$.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad -x^{100} + x^{99} \to -\infty.$

Neka su $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

u $\pm\infty$ se ponaša kao njegov vodeći član $a_n x^n$.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad -x^{100} + x^{99} \to -\infty.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad 1000 - x + x^5 - x^2 + x^4 \to$

Neka su $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

u $\pm\infty$ se ponaša kao njegov vodeći član $a_n x^n$.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad -x^{100} + x^{99} \to -\infty.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad 1000 - x + x^5 - x^2 + x^4 \to$

Neka su $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

u $\pm\infty$ se ponaša kao njegov vodeći član $a_n x^n$.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad -x^{100} + x^{99} \to -\infty.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad 1000 - x + x^5 - x^2 + x^4 \to -\infty.$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\dfrac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{1-0}{-2+0}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{1-0}{-2+0} = -\dfrac{1}{2}.$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{1-0}{-2+0} = -\dfrac{1}{2}.$
- $x \to -\infty \Rightarrow \dfrac{x^5}{1-x^2}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{1-0}{-2+0} = -\dfrac{1}{2}.$
- $x \to -\infty \Rightarrow \dfrac{x^5}{1-x^2} = \dfrac{x^5}{1-x^2}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{1-0}{-2+0} = -\dfrac{1}{2}.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^5}{1-x^2} = \dfrac{x^5}{1-x^2} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{1-0}{-2+0} = -\dfrac{1}{2}.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^5}{1-x^2} = \dfrac{x^5}{1-x^2} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^3}{\frac{1}{x^2}-1}$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\frac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{1-0}{-2+0} = -\dfrac{1}{2}.$
- $x \to -\infty \Rightarrow \dfrac{x^5}{1-x^2} = \dfrac{x^5}{1-x^2} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^3}{\frac{1}{x^2}-1} \to \left(\dfrac{-\infty}{-1}\right)$

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\dfrac{1}{x^m}$, pri čemu je x^m najveća potencija od x u nazivniku.

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to \dfrac{1-0}{-2+0} = -\dfrac{1}{2}.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^5}{1-x^2} = \dfrac{x^5}{1-x^2} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^3}{\frac{1}{x^2}-1} \to \left(\dfrac{-\infty}{-1}\right) = +\infty.$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

3. “Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija.”

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad x^{1000}e^{-x^2}$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty} e^{-x^2}$

3. “Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija.”

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0}$

3. “Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija.”

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty}\underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0}$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty}\underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x}$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \ \text{Ako } e^{p(x)} \to 0, \ \text{tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \ \text{Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \ \text{tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \ \text{ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x} = \dfrac{1}{x^5} e^{-x}$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x} = \underbrace{\dfrac{1}{x^5}}_{\to 0} \; e^{-x}$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x} = \underbrace{\dfrac{1}{x^5}}_{\to 0} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x} = \underbrace{\dfrac{1}{x^5}}_{\to 0} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x} = \underbrace{\dfrac{1}{x^5}}_{\to 0} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \to \quad \infty.$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x} = \underbrace{\dfrac{1}{x^5}}_{\to 0-} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \to \quad \infty.$

3. "Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija."

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0.$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x} = \underbrace{\dfrac{1}{x^5}}_{\to 0-} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \to -\infty.$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot e^x$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} \cdot e^x$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to \quad \infty.$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to \quad \infty.$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad x^2 e^{-x}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} e^{-x}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad x^{10} e^{-x^2+5x}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} e^{-x^2+5x}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} e^{\overbrace{-x^2 + 5x}^{\to -\infty}}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2 + 5x}^{\to -\infty}}}_{\to 0}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2 + 5x}^{\to -\infty}}}_{\to 0}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2+5x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} \to 0.$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2+5x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} \to 0.$

(d) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad x^5 e^{-x}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2+5x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} \to 0.$

(d) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad e^{-x}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2 + 5x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} \to 0.$

(d) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^5}_{\to -\infty} e^{\overbrace{-x}^{\to +\infty}}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2+5x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} \to 0.$

(d) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^5}_{\to -\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x}^{\to +\infty}}}_{\to +\infty}$

Primjer

(a) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e^x}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0+} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \to +\infty.$

(b) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \to 0.$

(c) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{10}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x^2+5x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} \to 0.$

(d) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^5}_{\to -\infty} \underbrace{e^{\overbrace{-x}^{\to +\infty}}}_{\to +\infty} \to -\infty.$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2}$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}}$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{x-2}$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0}}$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0}} \to \quad \infty.$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0-}} \to \quad \infty.$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0-}} \to -\infty.$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0-}} \to -\infty.$

(h) $x \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x}$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0-}} \to -\infty.$

(h) $x \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} \to +\infty.$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0-}} \to -\infty.$

(h) $x \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} \to +\infty.$

(i) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^2+1}$

Primjer

(e) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-x^2}^{\to -\infty}} \to 0.$

(f) $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}.$

(g) $x \to 2- \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0-}} \to -\infty.$

(h) $x \to 0+ \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} \to +\infty.$

(i) $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\underbrace{x^2+1}_{\to +\infty}} \to 0.$